

PROJEKTOWANIE CYLINDRÓW GRUBOŚCIENNYCH POD DZIAŁANIEM CIŚNIENIA I RÓZCIĄGANIA ZE WZGLĘDU NA KRUCHE PĘKANIE PRZY PEŁZANIU

MAREK R Y S Z (KRAKÓW)

Kołowo symetryczny cylinder poddany działaniu ciśnienia wewnętrznego i siły osiowej ulega pełzaniu, które opisano prawem Nortona-Odqvista. Kres górny naprężenia zastępczego Kaczanowa-Sdobyriewa ma spełnić warunek wytrzymałościowy dotyczący kruchej pęknięcia przy pełzaniu. Warunek ten jest podstawą do wyznaczenia niezbędnych wymiarów cylindra.

1. WSTĘP

Problematyką pełzania rur (często z aspektem ich żywotności) zajęto się już kilkadziesiąt lat temu i zainteresowanie to utrzymuje się do dziś. Wynika to zarówno z rozwoju badań i wprowadzenia nowych materiałów konstrukcyjnych jak i z coraz większych wymagań stawianych elementom nowoczesnych konstrukcji (reaktory, naczynia ciśnieniowe, konstrukcje lotnicze itd.).

Pierwsze badania nad pełzaniem rur cienkościennych poddanych jednoczesnemu rozciąganiu i skręcaniu przeprowadził już w 1935 roku R. BAILEY [1]. Podobnie F. K. ODQVIST w pracy [7] z 1936 roku analizuje m.in. pełzanie cienkościennego cylindra poddanego skręcaniu i rozciąganiu.

Przybliżone rozwiązanie zagadnienia niestalonego pełzania (teoria starzenia) rury grubościennej pod działaniem ciśnienia wewnętrznego podał po raz pierwszy Ł. KACZANOW [4]. Podobne zagadnienia rozwiązał J. RABOTNOW wykorzystując opracowaną przez siebie teorię wpływów wstępnych [9 i 10]. Pełzanie grubościennego cylindra obciążonego ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową badał J. FINNIE [2]. Autorzy prac [12 i 8] analizowali odkształcenia skończone cylindrów w tym ortotropowych.

Do nowszych prac należy praca [6], w której A. M. ŁOKOSZCZENKO, E. A. MIAKOTIN i A. SZIESTIERIKOW badają pełzanie i czas zniszczenia stalowych próbek cylindrycznych poddanych działaniu obciążeń złożonych, także w przypadku obciążeń zmiennych. P. G. REICHEL i W. S. EDELSTEIN [11] analizowali redystrybucję naprężeń w kołowo symetrycznych naczyniach ciśnieniowych i jej wpływ na możliwość inicjacji zniszczenia na odpowiednim brzegu.

Pełzanie grubościennej rury podanej poczwórnemu złożonemu obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym, siłą osiową, zginaniem i skręcaniem przy ustalonym pełzaniu typu Nortona–Odqvista — badali M. ŻYCKOWSKI i J. SKRZYPEK [15].

M. A. ZADOJAN [14] w 1968 r. rozwiązał problem pełzania ustalonego cylindra obciążonego ciśnieniem, siłą normalną i momentem skręcającym opierając się na złożonym w sposób ogólny rozkładzie przemieszczeń. Wyprowadzone przez niego wzory opisujące naprężenia mają postać zbliżoną do wzorów w niniejszej pracy, zostały jednak otrzymane na innej drodze. Trudny do zinterpretowania jest też wyliczony na ich podstawie, jako przykład, rozkład naprężeń obwodowych σ_θ , mianowicie dla wykładnika z prawa pełzania typu Nortona–Odqvista $n=3$ naprężenie to uzyskuje maksymalną wartość na brzegu wewnętrznym (jak dla materiału sprężystego), podczas gdy w rozwiązaniu podanym przez Ł. KACZANOWA [5] (dla płaskiego stanu prędkości odkształceń), a także w niniejszej pracy naprężenie to dla $n > 2$ maksymalną wartość ma na brzegu zewnętrznym cylindra. Odmienność ta może być tłumaczona wpływem skręcania, chociaż wydaje się, że jest on zbyt duży.

Obecna praca poświęcona jest teoretycznej analizie pełzania i odnośnemu wymiarowaniu cylindra grubościennego, obciążonego ciśnieniem wewnętrznym i siłą osiową. Jest to więc przypadek prawie klasyczny, natomiast oryginalność pracy polega na wykorzystaniu warunku wytrzymałościowego dotyczącego kruchego pęknięcia, do celów bezpośredniego wymiarowania cylindra. W założeniach swoich jest oparta ona na niektórych wnioskach otrzymanych przez Ł. KACZANOWA [5], oraz M. ŻYCKOWSKIEGO i J. SKRZYPKA [15]. Równanie opisujące proces pełzania zaczerpnięte z [15] rozwiązano tu ściśle z dokładnością strony numerycznej podczas, gdy w [15] rozwiązano je w przybliżeniu opierając się na rozwinięciach w szeregi potęgowe. Ł. KACZANOW w swoim rozwiązaniu założył płaski stan prędkości odkształceń, od czego tu odstąpiono.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA ZNISZCZENIA I WYMIAROWANIA

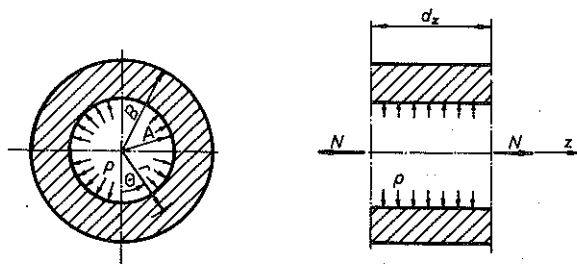
Rozpatrujemy grubościenny, kołowo symetryczny cylinder obciążony ciśnieniem wewnętrznym p i siłą osiową N (rys. 1).

Materiał cylindra ulega pełzaniu; zakładamy, że jest ono ustalone i opisane prawem Nortona–Odqvista:

$$(2.1) \quad \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_c} = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_c} \right)^n,$$

$$e_{ij} = f(\sigma_e) s_{ij}, \quad \varepsilon_{ii} = 0,$$

gdzie s_{ij} , e_{ij} oznaczają składowe dewiatora naprężeń i prędkości odkształceń,



Rys. 1

ε_e , σ_e , n stałe materiałowe, $f(\sigma_e)$ moduł pełzania, σ_e , ε_e , intensywność naprężeń i prędkości odkształceń wg hipotezy H-M-H oraz

$$(2.2) \quad \varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij},$$

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2}} s_{ij} s_{ij}.$$

W pracy zajmować się będziemy wymiarowaniem cylindrów grubościennych ze względu na kruche pękanie przy pełzaniu. Przyjmujemy, że proces zniszczenia przebiega w myśli hipotezy KACZANOWA-SDOBYRIEWA [13], mówiącej, że

$$(2.3) \quad \frac{d\psi}{dt} = -C \left(\frac{\sigma_s}{\psi} \right)^v,$$

gdzie oznaczono naprężenie zredukowane:

$$(2.4) \quad \sigma_s = \delta \sigma_1 + (1 - \delta) \sigma_e$$

wg Sdobyriewa, σ_1 oznacza maksymalne naprężenie główne, $0 \leq \psi \leq 1$ miarę ciągliwości materiału, C , v , $0 \leq \delta \leq 1$ stałe materiałowe.

W przypadku braku redystrybucji naprężeń $\sigma_{ij} = \text{const}(t)$ (pełzanie ustalone, małe odkształcenia), a czas pierwszych mikropęknięć określa wzór

$$(2.5) \quad t_R = \frac{1}{(v+1) C \sigma_s^v}.$$

Zakłada się, że dla konstrukcji zaprojektowanej dla pewnego z góry danego czasu życia t_R powinien być on osiągnięty równocześnie w możliwie dużej ilości punktów przekroju (konstrukcja równomiernej wytrzymałości na kruche pękanie przy pełzaniu). Oznaczając więc w (2.5) stosowne naprężenie przez σ_{SR} i wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa dla naprężeń j , otrzy-

mamy warunek

$$(2.6) \quad \sigma_s = \frac{\sigma_{SR}}{j} = \frac{1}{j \sqrt[2]{(v+1) Ct_R}} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_0 = \text{const}(r, \theta).$$

Wiadomo też, że w kołowo symetrycznych cylindrach grubościennych w przypadku płaskiego stanu prędkości odkształceń ($\varepsilon_z = 0$), dla wykładnika pełzania $n = 2$ następuje wyrównanie naprężeń obwodowych w całej objętości ($\sigma_\theta(r) = \text{const}$, Ł. KACZANÓW [5]). Dla wykładników $n > 2$ kres górny maksymalnego naprężenia rozciągającego w tym przypadku stanowi naprężenie obwodowe σ_θ na brzegu zewnętrznym ($\sup \sigma_1(r) = \sigma_\theta(B)$), a dla $1 \leq n < 2$ to samo naprężenie, lecz na brzegu wewnętrznym ($\sup \sigma_1(r) = \sigma_\theta(A)$). Wobec powyższego w rozpatrywanym elemencie istnieją następujące warianty obszarów; w których może zachodzić spełnienie warunku równomiernej wytrzymałości (2.6). I — na całej powierzchni przekroju, II — wzdłuż pewnych linii.

Wariant I możliwy jest tylko w opisanym już powyżej przypadku ($n = 2$, $\delta = 1$, $\varepsilon_z = 0$) lub wprowadzając optymalnie dobrane pole temperatury. Dla innych wartości n , δ , ε_z spełnienie warunku (2.6) możliwe jest tylko wzdłuż pewnej linii. W świetle omówionych powyżej wyników linią (powierzchnią) równomiernej wytrzymałości ze względu na kruche pęknięcie może być: a) brzeg wewnętrzny: $r = \tilde{r} = A$; b) brzeg zewnętrzny: $r = \tilde{r} = B$; c) brzeg zewnętrzny i wewnętrzny: $\tilde{r} = A$ i $\tilde{r} = B$ równocześnie oraz d) pewna linia pośrednia $A < \tilde{r}(\theta) < B$.

W obecnej pracy zbadamy przypadki *a* i *b* natomiast przypadki *c* i *d* obejmujące zresztą niewielki zakres parametrów będą tu jedynie wzmiankowane.

3. RÓWNIANIA PODSTAWOWE

Rozkład naprężeń i odkształceń grubościennego cylindra o własnościach reologicznych, opisanych prawem Nortona–Odqvista w przypadku złożonego obciążenia (ciśnienie, siła osiowa, skręcanie i zginanie), został określony przez M. ŻYCHKOWSKIEGO i J. SKRZYPKĄ w pracy [15]. Dostosowując zamieszczone tam wyniki do naszego, znacznie prostszego przypadku obciążenia, otrzymamy układ równań opisujących proces w postaci następującej:

$$(3.1) \quad \left[\left(\phi'' - \frac{1}{\delta} \phi \right)^2 - F^{n-1} \right] F^2 + 3\lambda^2 = 0,$$

$$\left(\varrho^2 \frac{d^2}{d\varrho^2} + 3\varrho \frac{d}{d\varrho} \right) \left[\left(\phi'' - \frac{1}{\varrho} \phi' \right) F \right] = 0,$$

gdzie $\varrho = r/B$ i $\phi(\varrho)$ jest funkcją naprężeń taką, że

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= K \frac{\phi'}{\varrho}, & K &= \frac{2\sigma_c}{3 \frac{n+1}{2n} \varepsilon_c^{1/n}}, & (\cdot)' &= \frac{d}{d\varrho}, \\ \sigma_\theta &= K\phi'', \end{aligned}$$

co zapewnia tożsamościowe spełnienie równań równowagi wewnętrznej, a $F(\varrho) = Kf[\sigma_e(\varrho)]$ oznacza bezwymiarowy moduł pełzania, oraz λ prędkość odkształcenia osi cylindra.

Tak samo jak w [15] naprężenie osiowe jest równe.

$$(3.3) \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{3}{2f} \lambda.$$

Wykorzystując wynikający z (3.1)₁ fakt, że

$$(3.4) \quad F\left(\phi'' - \frac{1}{\varrho} \phi'\right) = \sqrt{F^{\frac{2n}{n-1}} - 3\lambda^2} = X(\varrho)$$

oraz to, że (3.1)₁ da się łatwo rozwiązać ze względu na tę wielkość, jesteśmy w stanie przekształcić układ nieliniowych równań różniczkowych (3.1) do jednego równania liniowego:

$$(3.5) \quad \phi'' - \frac{1}{\varrho} \phi' = (C_1 + C_2 \varrho^{-2}) [(C_1 + C_2 \varrho^{-2}) + 3\lambda^2]^{\frac{1-n}{2n}} = g(\varrho),$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi całkowania wymagającymi odrębnego określenia. Analityczne rozwiązanie równania (3.5), określającego funkcję naprężeń ϕ , napotyka na trudności (otrzymane dwumienne całki nie wyrażają się przez funkcje elementarne). Do określenia stanu naprężenia wystarczy jednak znalezienie pochodnych

$$(3.6) \quad \phi' = \varrho \int \frac{g(\varrho)}{\varrho} d\varrho + C_3 \quad \text{oraz} \quad \phi'' = g(\varrho) + \frac{1}{\varrho} \phi'$$

(C_3 oznacza stałą całkowania), które po podstawieniu do (3.2) i (3.3) opiszą naprężenia jako odpowiednie funkcję promienia ϱ .

Z warunku kołowej symetrii prędkości przemieszczeń

$$u_\theta = \int (\varepsilon_\theta r - u_r) d\theta = 0$$

(gdzie $u_r = \int \varepsilon_r dr$) po podstawieniu odpowiednich, uprzednio znalezionych funkcji zmiennej ϱ na miejsce prędkości odkształceń wynika że $C_1 = 0$.

Zmieniając w (3.6) całkę nieoznaczoną na oznaczoną ($\alpha \leq \varrho \leq 1$, $\alpha = A/B$) i podstawiając $C_1 = 0$ ostatecznie otrzymamy

$$(3.7) \quad s_r(\varrho) = \frac{\sigma_r}{K} = \int_1^{\varrho} \frac{g(x)}{x} dx + C_3,$$

gdzie x jest zmienną całkowania,

$$(3.8) \quad \begin{aligned} s_\theta(\varrho) &= \frac{\sigma_\theta}{K} = g(\varrho) + s_r(\varrho), \\ s_z(\varrho) &= \frac{\sigma_z}{K} = \frac{1}{2}(s_r + s_\theta) + \frac{3}{2}\lambda(C_2^2 \varrho^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1-n}{2n}}. \end{aligned}$$

Warunki brzegowe nałożone na naprężenie są następujące:
na brzegu zewnętrznym

$$(3.9) \quad s_r(1) = 0,$$

na brzegu wewnętrznym

$$(3.10) \quad s_r(\alpha) = -\frac{P}{K}$$

oraz warunek równomiernej wytrzymałości ze względu na kruche pęknięcie (2.6), który po uwzględnieniu (2.4) i pewnych przekształceń przybierze tu postać

$$(3.11) \quad s_{s\theta} = \delta s_\theta(\tilde{\varrho}) + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\delta)(C_2^2 \tilde{\varrho}^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sigma_0}{K},$$

gdzie $\tilde{\varrho} = \alpha$ lub $\tilde{\varrho} = 1$. Umożliwiają one wyznaczenie w drodze obliczeń numerycznych wymiarów rurociągu.

Z warunku (3.9) wynika wprost $C_3 = 0$. Sumując po podstawieniu (3.7) i (3.8)₁ warunek brzegowy (3.10) i warunek wytrzymałościowy (3.11) (stawiany na brzegu wewnętrznym lub zewnętrznym) otrzymamy następujące układy równań:

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \int_\alpha^1 \frac{g(x)}{x} dx &= \frac{P}{K}, \\ \delta C_2(C_2^2 + 3\lambda^2)^{\frac{1-n}{2n}} + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\delta)(C_2^2 + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} &= \frac{\sigma_0}{K}, \end{aligned}$$

gdy $\tilde{\varrho} = 1$ (brzeg zewnętrzny), oraz

$$(3.13) \quad \int_{\alpha}^1 \frac{g(x)}{x} dx = \frac{p}{K},$$

$$\delta \left[C_2 \alpha^{-2} (C_2^2 + 3\lambda^2)^{\frac{1-n}{2n}} - \frac{p}{K} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (C_2^2 \alpha^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sigma_0}{K};$$

gdy $\tilde{\varrho} = \alpha$ (brzeg wewnętrzny). Funkcja $g(x)$ jest zdefiniowana przez (3.5) z podstawieniem $C_1 = 0$.

Dodatkowym ograniczeniem jest warunek zabezpieczający przed rozerwaniem rurociągu w wyniku rozciągania osiowego; przybiera on postać

$$(3.14) \quad \sigma_{sz} = \delta \sigma_z(\varrho) + (1-\delta) \sigma_e(\varrho) \leq \sigma_0,$$

a po podstawieniach

$$(3.15) \quad s_{sz} = \delta s_z(\varrho) + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (C_2^2 \varrho^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{\sigma_0}{K}.$$

Wymiary przekroju wyliczone na podstawie powyższych równań zapewniają spełnienie warunku równomiernej wytrzymałości $\sigma_{s\theta} = \sigma_0$, (3.11) i ograniczenia $\sigma_{sz} \leq \sigma_0$; (3.15).

W omawianym przypadku obciążenia wymiary takie nie muszą jednak dawać minimalnego pola przekroju. Wydaje się bowiem, że znaczne zmniejszenie wymiaru wewnętrznego A (korzystne ze względu na przenoszenie ciśnienia) i zamiana warunku (3.11) na ograniczenie $\sigma_{s\theta} \leq \sigma_0$ z równoczesną zamianą (3.14) na warunek $\sigma_{sz} = \sigma_0$, który byłby wtedy priorytetowym warunkiem kształtowania, pozwoliłyby na uzyskanie dalszego zmniejszenia pola przekroju. Takim sformułowaniem nie będziemy się tu jednak zajmować, pozostając przy warunku (3.11) jako przy podstawowym kryterium wymiarowania. Kierujemy się tu potrzebą uzyskania bazy porównawczej dla rozwiązań, uzyskanych metodą rozwinięć w szeregi małych parametrów w ogólnym przypadku obciążenia [16].

W przypadku, gdy zadanie jest p i N warunek (3.15) traktowany jako równanie $s_{sz} = \sigma_0/K$ wraz z równaniem (3.12) lub (3.13) stanowić będzie układ trzech równań z trzema niewiadomymi C_2 , α , λ . Po rozwiązaniu tego układu i wyliczeniu niewiadomych parametrów z związku

$$(3.16) \quad N = \int_S \sigma_z dS = \pi B^2 \left[p\alpha^2 + 3\lambda K \int_{\alpha}^1 \right]$$

wyznamy wymiar przekroju.

W sformułowaniu, gdy dane jest p i A , warunek (3.15) nie będzie warunkiem czynnym kształtowania. Z układu (3.12) lub (3.13) dla danej

wartości jednego z parametrów traktowanego jako parametr sterujący, obliczamy dwa pozostałe parametry, a następnie ze wzoru (3.16) doliczymy odpowiadającą im siłę. Warunek (3.15) sprawdzany każdorazowo nie musi być wtedy spełniony tożsamościowo. Podejście to było stosowane w przykładowych obliczeniach.

Celem dalszego uproszczenia obliczeń numerycznych wprowadzimy nową zmienną $\mu = 3\lambda^2/C_2^2$, co ułatwi wyliczenie stałej $C_2(\mu, \alpha)$. Z drugiego równania układu (3.12) otrzymamy:

$$(3.17) \quad C_2 = \left[\frac{\sigma_0}{K} \frac{1}{\delta (1+\mu)^{\frac{1-n}{2n}} + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (1+\mu)^{\frac{1}{2n}}} \right]^n,$$

jeśli $\tilde{q} = 1$ (warunek wytrzymałościowy spełniony na brzegu zewnętrznym). Podobnie z (3.13) znajdziemy

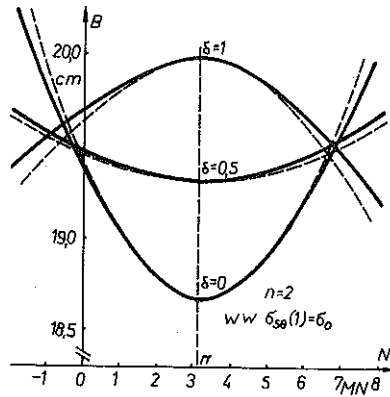
$$(3.18) \quad C_2 = \left[\frac{\sigma_0 + \delta_p}{K} \frac{1}{\delta \alpha^{-2} (\alpha^{-4} + \mu)^{\frac{1-n}{2n}} + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (\alpha^{-4} + \mu)^{\frac{1}{2n}}} \right]^n,$$

jeśli warunek wytrzymałościowy (3.11) spełniony jest na brzegu wewnętrznym, $\tilde{q} = \alpha$. Traktując μ jako parametr sterujący, z warunku brzegowego (pierwszego równania w układach (3.12) lub (3.13)), po podstawieniu (3.17) lub (3.18) — na drodze numerycznej łatwo znajdziemy α .

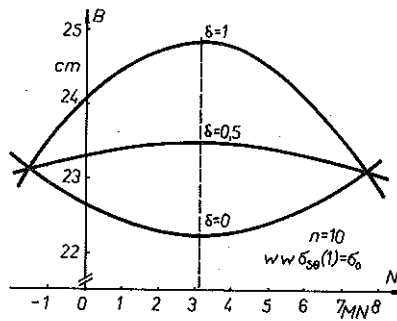
W programie obliczeń wprowadzono nową zmienną całkowania $y = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$, co umożliwiło wyrugowanie niewiadomej α z granicy całki.

4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

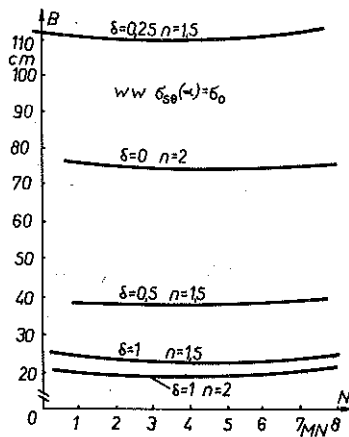
Obliczenia przeprowadzono na maszynie cyfrowej K-202 wg programu wykonanego w języku BASIC-FL. Zrealizowano je dla wielu wartości wykładnika n i współczynnika δ przy ustalonych wartościach $A = 10$ cm, $p = 100$ MN/m², $\varepsilon_c = 2,78 \cdot 10^{-4}$ 1/s, $\sigma_c = 200$ MN/m², $\sigma_0 = 100$ MN/m². Wyniki obliczeń przedstawiające zależności wymiaru zewnętrznego B od siły N ilustrują wykresy na rys. 2, 3 i 4. Dla porównania linią przerywaną naniesiono odpowiednie wyniki otrzymane metodą rozwinięć w szeregi małego parametru λ przedstawioną w pracy [16]. Jak widać, wokół wartości $N = N_0 = \pi$ MN (odpowiadającej płaskiemu stanowi prędkości odkształceń, $\varepsilon_z = 0$) obie metody dają bardzo zbliżone wyniki. Dla dużych $|N - N_0|$ metoda rozwinięć w szeregi przestaje być zadowalająco dokładna.



Rys. 2. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości siły N , gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm, $n = 2$



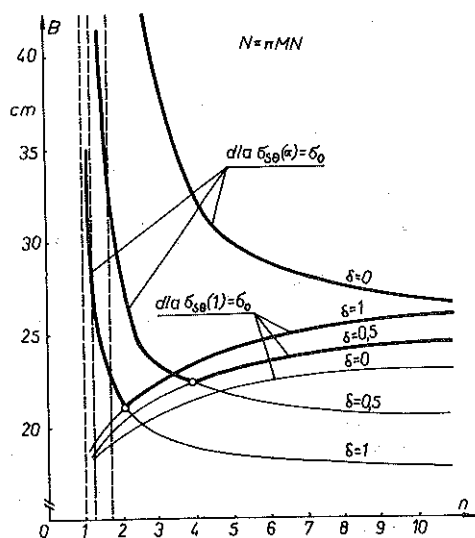
Rys. 3. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości siły N , gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm, $n = 10$



Rys. 4. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości siły N , gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu wewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm

Z porównania rys. 2 i 4 widać, że wymiary przekroju w zależności od tego, na którym konturze żądamy spełnienia warunku równomiernej wytrzymałości, różnią się znacznie. Różnice te są tym większe, im δ jest bliższe zero (im hipoteza Sdobyriewa jest bliższa hipotezie Hubera). Odmienne jest też jakościowe zachowanie się $B(N)$: zależnie od wartości wykładnika n i współczynnika δ oraz od tego, na której powierzchni jest spełniony warunek wytrzymałościowy, wymiar ten może rosnać lub maleć wraz ze zmianami siły N .

Rys. 5. ilustruje zmiany B w zależności od n dla różnych δ w przypadkach gdy $\sigma_{s\theta}^{(1)} = \sigma_0$ i $\sigma_{s\theta}(\alpha) = \sigma_0$.



Rys. 5. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości wykładnika n , gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym lub wewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm, $N = \pi MN$

Punkty przecięcia się linii odpowiadających tym samym wartościom δ na rys. 5 wyznaczają takie wartości wykładnika n i promienia zewnętrznego B , dla których warunek równomiernej wytrzymałości jest spełniony na obu brzegach równocześnie.

Takie zagadnienie (tzn. gdy żądaliśmy spełnienia warunku równomiernej wytrzymałości z uwagi na kruche pękanie na obu brzegach) byłoby opisane układem równań

$$(4.1) \quad \sigma_r(\alpha) = -p \rightarrow \int_{\alpha}^1 \frac{g(x)}{x} dx = \frac{p}{K},$$

$$(4.1) \quad \sigma_{s0}(1) = \sigma_0 \rightarrow \delta C_2 (C_2^2 + 3\lambda^2)^{\frac{1-n}{2n}} + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (C_2^2 + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sigma_0}{K},$$

[cd.]

$$\sigma_{s0}(\alpha) = \sigma_0 \rightarrow \delta \left[C_2 \alpha^{-2} (C_2^2 \alpha^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1-n}{2n}} - \frac{p}{K} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} (1-\delta) (C_2^2 \alpha^{-4} + 3\lambda^2)^{\frac{1}{2n}} = \frac{\sigma_0}{K}.$$

oraz warunkiem (3.14), w którym niewiadomymi byłyby λ , α , C_2 i jedna ze stałych materiałowych n lub δ .

Podobnie jak poprzednio przyjmując λ za parametr sterujący mogliśmy, rozwiązując numerycznie układ (4.1), wyliczyć niewiadome, a z równania (3.17) wymiar przekroju B (lub odpowiednią siłę N).

Przykładowe obliczenia ograniczymy do przypadku $\delta = 1$ (dla dowolnego bowiem δ układ nie redukuje się i rozwiązanie jest bardzo czasochłonne). Zależności, jakie muszą być zachowane między α , n , N , aby powyższe warunki zostały spełnione, ujęto w tabelicy 1.

Tabela 1

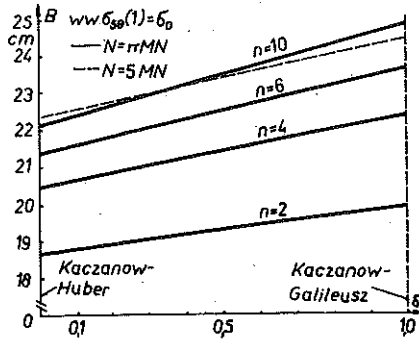
B [cm]	α	n	N [MN]	$\sigma_{sz}^{(e)}$ [MN/m ²]	
				$q = \alpha$	$q = 1$
20,00	0,500	2,00	3,14	1,5	52,9
19,80	0,505	2,23	7,01	27,1	93,9
19,61	0,510	2,65	9,19	43,4	133,5

$$\delta = 1, A = 10 \text{ cm}, \sigma_0 = 100 \text{ MN/m}^2, \sigma_{s0}(\alpha) = \sigma_{s0}(1) = \sigma_0.$$

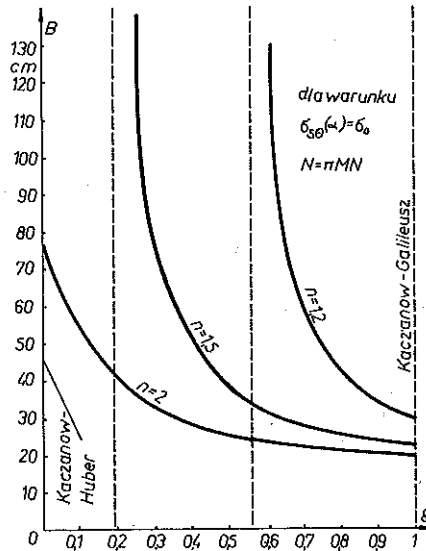
Dla wartości n , α , N tu przedstawionych warunek równomiernej wytrzymałości jest spełniony na obu brzegach, ale jednocześnie jest przekraczany wewnątrz obszaru, a więc pękanie nie będzie się rozpoczynać od brzegów a od środka ścianki cylindra.

Rys. 6 i 7 przedstawiają te same zależności, co rys. 5, lecz w nieco innym układzie: widać tu wyraźnie, że w przypadku, kiedy warunek równomiernej wytrzymałości jest spełniony na powierzchni wewnętrznej, ($\sigma_{s0}(\alpha) = \sigma_0$), nie dla każdej wartości n i δ istnieje rozwiązanie (odpowiedni wymiar zapewniający spełnienie obranych warunków); wykresy $B(\delta)$ dla $n < 2$ mają pionowe asymptoty.

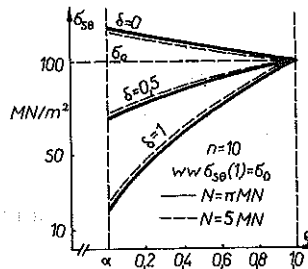
Analizując zmiany stanu naprężenia wywołane zwiększaniem lub zmniejszaniem siły N w stosunku do wartości $N = \pi$, MN, możemy stwierdzić, że w przypadku, gdy warunek równomiernej wytrzymałości spełniony jest na brzegu zewnętrznym, dla pewnych wartości $\delta > 0$ następuje wzrost naprężeń (wyteżenia) (rys. 8) lepsze wykorzystanie materiału, a wymiary przekroju mają na ogół wtedy tendencje malejące. Odwrotna sytuacja da się zaobser-



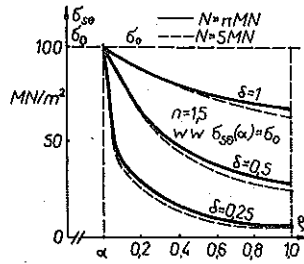
Rys. 6. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości stałej materiałowej δ , gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm



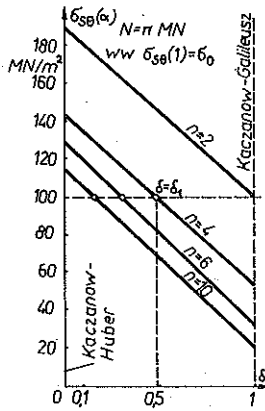
Rys. 7. Zależność wymiaru zewnętrznego B od wartości stałej materiałowej δ , gdy warunek wytrzymałościowy jest spełniony na brzegu wewnętrznym cylindra. $A = 10$ cm, $N = \pi MN$



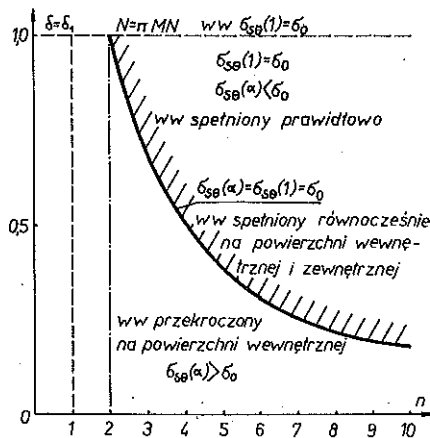
Rys. 8. Wykres naprężenia zredukowanego σ_{s0} w ścianie cylindra w przypadku, gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym



Rys. 9. Wykres naprężenia zredukowanego σ_{sp} w ścianie cylindra w przypadku, gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu wewnętrznym



Rys. 10. Zależność naprężenia zredukowanego σ_{sp} , na brzegu wewnętrznym cylindra ($q = \alpha$) w zależności od wartości stałej materiałowej δ w przypadku, gdy warunek wytrzymałościowy spełniony jest na brzegu zewnętrznym



Rys. 11. Obszary stałych materiałowych $\delta = \delta_1$ i n , w których warunek wytrzymałościowy spełniony jest prawidłowo lub przekroczone

wować przy warunku $\sigma_{s\theta}(\alpha) = \sigma_0$: wzrost siły powoduje spadek wyężenia i wzrost wymiarów niezależnie od δ (rys. 9).

Z rys. 8 można nadto wyciągnąć wniosek, że wprawdzie żądany warunek $\sigma_{s\theta}(1) = \sigma_0$ jest zawsze spełniony, ale dla δ bliskich zeru jest on najpierw spełniany (przekraczany) na powierzchni wewnętrznej ($\varrho = \alpha$). Budując więc wykres zależności „naprężenia Sdobyriewa” $\sigma_{s\theta}(\alpha)$ od δ (rys. 10) dla różnych wartości wykładnika n i ustalonej siły N , możemy na nim odczytać takie wartości $\delta = \delta_1$ i odpowiadające im n , dla których naprężenie $\sigma_{s\theta}(\alpha)$ nie przekracza dopuszczalnej wartości σ_0 . Zależność taka została przedstawiona na rys. 11. Obszar zakreskowany na nim jest obszarem „bezpiecznym”, tzn. że n i δ dobrane z tego obszaru zapewniają, że naprężenie dopuszczalne nie zostanie przekroczone nigdzie poza powierzchnią zewnętrzną.

Jak wspomniano, w pracy [16] został przedstawiony pokrewny problem, mianowicie problem optymalnego kształtowania przekroju poprzecznego cylindra grubościennego obciążonego ciśnieniem, siłą osiową i momentem zginającym. Rozwiązano go metodą rozwinięć w podwójne szeregi małych parametrów λ , κ , (κ oznacza prędkość krzywizny osi rurociągu związaną ze zginaniem), przyjmując za stan podstawowy kołowo symetryczny cylinder pod działaniem ciśnienia przy płaskim stanie prędkości odkształceń.

Zastosowanie niniejszego, ogólniejszego rozwiązania jako stanu podstawowego do problemu optymalizacji w obecności zginania metodą rozwinięć w pojedynczy szereg parametru κ nie dało, niestety, rezultatu (forma powyższego rozwiązania jest zbyt skomplikowana), ale może ono posłużyć m.in. jako baza porównawcza dla wyników uzyskanych w [16]. Pozwala ono np. na zorientowanie się w możliwości spełnienia warunku równomiernej wytrzymałości na brzegach cylindra w zależności od wartości stałych materiałowych n , δ i danych obciążeń, a także oszacować zbieżność szeregu względem λ przy założonym $\kappa = 0$. Spodziewać się można, że nałożenie niewielkiego zginania również te zależności niewiele zmieni.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. W. BAILEY, *The utilization of creep test data in engineering design*, The Institution of Mechanical Engineers Proceedings, 131, 1935.
2. J. FINNIE, *Steady-state creep of a thick-walled cylinder under combined axial load and internal pressure*, ASME 59-A.
3. A. E. JOHNSON, J. HENDERSON, B. KHAN, *Creep of a solid metallic bar or thick-walled tube of circular section, at elevated uniform bending moment, torque and axial load*, Int. J. Mech. Sci., 4, 195—203, 1962.
4. Л. Качанов, *К теории неустановившейся ползучести*, ОГИЗ ГИЗЗЛ, 1949.
5. Л. Качанов, *Теория ползучести*, ФИЗМАТГИЗ, Москва 1960.
6. А. М. Локошченко, Е. А. Мякотин, С. А. Шестереков, *Ползучесть и длительная прочность стали X 18 Н10Т в условиях сложно-напряженного состояния*, Мех. тв. тела, 4, 1979.

7. F. K. G. ODQVIST, *Theory of creep under the action of combined stresses with applications to high temperature machinery*, Royal Swedish Institute for Engineering Research, Proceedings 141, Stockholm 1936.
8. J. C. MISARA, S. C. SAMANTA, *Finite creep in thick-walled cylindrical shells at elevated temperatures*, Acta Mech., 149—155, 1981.
9. Я. Н. РАБОТНОВ, *Расчет деталей машин на ползучесть*, Изв. АН СССР, ОТН, 6, 1948.
10. Я. Н. РАБОТНОВ, *Некоторые вопросы теории ползучести*, Вестник Московского Университета, 10, 1948.
11. P. G. REICHEL, W. S. EDELSTEIN, *On refined creep bounds and brittle damage estimates for pressure vessels*, Int. Solids Struct., 16, 41—59, 1980.
12. F. P. J. RIMROTT, *Creep of thick-walled tubes with internal pressure considering large strains*, J. Appl. Mech., 26, 1959.
13. В. Н. СДОБЫРЕВ, *Критерии длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии*, Изв. А. Н. ССР, ОТН, Мех. и Машиностр., 6, 1959.
14. М. А. ЗАДОЯН, *Ползучесть цилиндрической трубы при совместном воздействии внутреннего давления, осевой силы и крутящего момента*, Мех. тв. тела, 1, 1968.
15. M. ŻYCZKOWSKI, J. SKRZYPEK, *Influence of bending, torsion and tension on the stationary creep of a pipe-line*, Arch. Mech., 24, 4, 1971.
16. M. RYSZ, *Optimal design of a thick-walled pipe-line cross-section against creep rupture*, Submitted to Acta Mech.

РЕЗЮМЕ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДАВЛЕНИЯ И РАСТЯЖЕНИЯ ИЗ-ЗА ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Круговосимметричный цилиндр, подвергнутый действию внутреннего давления и осевой силы, подлжет ползучести, которая описана законом Нортона-Оквиста. Верхний предел эквивалентного напряжения Качанова-Сдобырева должен удовлетворить условию прочности, касающемуся хрупкого разрушения при ползучести. Это условие является основой для определения необходимых размеров цилиндра.

SUMMARY

DESIGN OF THICK-WALLED CYLINDERS SUBJECT TO INTERNAL PRESSURE AND AXIAL FORCE FROM THE POINT OF VIEW OF BRITTLE CREEP RUPTURE

A thick-walled cylinder is subject to internal pressure and axial force. The creep of the cylinder is described by the Norton-Odqvist creep law. Upper bound of the reduced stress according to Kachanov-Sdobryev should satisfy the strength condition describing the brittle creep rupture. Such a condition is the basis for designing the cylinder under consideration.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 30 lipca 1984 r.